Implementasi Teori Graf untuk Menyelesaikan Permainan Sudoku

Prana Gusriana 13519195[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13519195@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkan simpul tersebut. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Model graf dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan permasalahan pada berbagai bidang seperti untuk menyelesaikan permasalahan jaringan sosial, jaringan komunikasi, jaringan informasi, jaringan transportasi, jejaring makanan pada bidang biologi, rangkaian listrik, turnamen, bahkan pada permainan sudoku. Sudoku adalah permainan teka-teki berbasis logika dengan pemain harus memasukkan angka dari satu sampai n^2 (untuk sudoku berukuran $n^2 x n^2$) pada setiap sel dengan angka pada setiap kolom, baris, dan sub-kotak tidak boleh ada yang sama. Tanpa disadari ternyata permainan sudoku dapat dimodelkan dengan graf dan dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan graf. Pada makalah ini dibahas pengaplikasian teori graf untuk menyelesaikan permainan sudoku.**

***Keywords*—Graf, Pewarnaan graf, Sudoku, Simpul**

I. PENDAHULUAN

Sejarah sudoku tidak terlepas dari permainan matematikawan Swiss pada abad ke-18 yang disebut sebagai "*Latin Squares*" dan juga beberapa teka-teki angka yang dipublikasi melalui koran di Prancis pada 1895. Permainan sudoku modern seperti yang kita kenal saat ini pertama kali diperkenalkan oleh Howard Garns yang berasal dari Connersville, Indiana, USA pada tahun 1979 melalui majalah Dell Pencil Puzzle and Word Games dengan nama "*Number Place*" karena melibatkan penempatan nomor individu ke tempat-tempat kosong pada grid 9 x 9. Selanjutnya permainan sudoku ini pertama kali muncul di Jepang pada tahun 1984 dengan nama "Sudoku" (singkatan dari *Sūji wa dokushin ni kagiru*) yang berarti digit-digitnya dibatasi untuk muncul hanya satu kali saja.

Gambar 1.1 Sudoku
Sumber [8]

Sudoku adalah permainan teka-teki berbasis logika yang secara umum berukuran kotak n^2 x n^2 dan terdiri dari n^2 x n^2 sel, n^2 baris, n^2 kolom, dan n^2 sub-kotak yang setiap sub-kotaknya terdiri dari n x n sel. Contohnya untuk n = 3 maka terdiri dari 81 sel, 9 baris, 9 kolom, dan 9 sub-kotak yang setiap sub-kotak nya terdiri dari 9 sel. Saat ini ukuran, bentuk atau jenis dari permainan sudoku sangat bervariasi beberapa diantaranya adalah jigsaw sudoku, twin sudoku, hyper sudoku, killer sudoku, dan samurai sudoku. Lalu untuk memudahkan dalam mengartikan kosakata yang digunakan pada makalah ini berikut adalah definisi dan ilustrasi dari sel, baris, kolom, kotak, dan sub-kotak pada sudoku 9x9:

1. Sel
Sel adalah kotak terkecil yang harus diisi dengan angka

Gambar 1.2 Ilustrasi Sel
Sumber [8]

2. Baris
Laju-lajur horizontal

3. Kolom
Lajur-lajur vertikal

Gambar 1.3 Ilustrasi kolom
Sumber [8]

4. Sub-kotak
Bagian dari kotak yang hanya berukuran nxn

Gambar 1.4 Ilustrasi sub-kotak
Sumber [8]

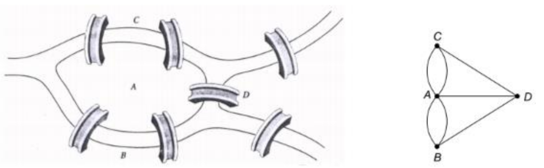
5. Kotak
Terdiri dari n buah sub-kotak seperti pada gambar 1.1.

Tujuan dari permainan sudoku n^2 x n^2 ini adalah pemain dapat berhasil mengisi seluruh sel yang tersedia dengan angka 1 sampai n² sesuai dengan aturan dari permainan ini. Aturan mainnya adalah pemain harus mengisikan angka 1 sampai n² pada setiap sel dengan setiap kolom, baris, dan sub-kotak tidak boleh terdapat angka yang ganda atau harus berbeda. Oleh sebab itu, permainan sudoku dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan graf karena prinsip dari pewarnaan graf adalah setiap simpul yang bertetangga tidak boleh berwarna sama.

II. DASAR TEORI

A. Definisi Graf

Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkan simpul tersebut. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Berdasarkan sejarah, persoalan yang pertama kali menggunakan konsep graf adalah persoalan Jembatan Königsberg. Persoalannya adalah dapatkah orang melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Orang-orang saat itu percaya bahwa tidak mungkin kita melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula tetapi tidak tahu apa alasannya. Lalu pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler menemukan alasannya dengan memodelkan persoalan jembatan Königsberg ini ke dalam graf.



Gambar 2.1 Jembatan Königsberg dan Model Grafnya

Graf G didefinisikan dengan G = (V, E) yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau nodes) dan E adalah himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul dan E ini boleh merupakan himpunan kosong. Misal V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan E = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, maka $e_1 = (v_1, v_2)$ berarti sisi e_1 menghubungkan simpul v_1 ke simpul v_2.

B. Jenis-Jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang (sisi yang menghubungkan suatu simpul dengan simpul itu sendiri) atau sisi ganda (lebih dari satu sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama) pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:

1. Graf sederhana
   Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi .
2. Graf tak-sederhana
   Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibedakan lagi menjadi graf ganda (graf yang mengandung sisi ganda) dan graf semu atau pseudo-graph (graf yang mengandung sisi gelang)

Berdasarkan orientasi arah pada sisinya, graf dibedakan menjadi dua jenis, yaitu

1. Graf tak-berarah
   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
2. Graf berarah
   Graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah.

C. Terminologi Graf

1. Ketetanggaan

Dua buah simpul u dan v dalam graf tak berarah G dikatakan bertetangga (adjacent) jika u dan v keduanya dihubungkan secara langsung oleh sisi e dalam graf G.

2. Bersisian

Untuk sembarang sisi e = (u, v) disebut bersisian dengan simpul u dan bersisian dengan simpul v jika e menghubungkan secara langsung simpul u dan v.

3. Graf Kosong (null graph atau empty graph)

Pada dasarnya suatu graf G = (V, E) tidak boleh memiliki himpunan simpul yang kosong namun boleh memiliki himpunan sisi yang kosong. Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (Nn) disebut dengan graf kosong atau null graph. .

4. Derajat (degree)

Derajat atau degree dari sebuah simpul dalam graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut, untuk sisi gelang derajatnya dihitung dua kali. Derajat dari sebuah simpul v disimbolkan dengan deg(v). Pada graf berarah, derajat setiap simpul dibedakan lagi menjadi derajat masuk (in-degree) dan derajat keluar (out-degree)

Menurut lemma jabat tangan, jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali dari jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain jika G = (V, E), maka $\sum_{i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$.

5. Lintasan (path)

Lintasan yang panjangnya n dan simpul awal v0 ke simpul tujuan vn di dalam graf G adalah barisan selang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v0, e1, v1, e2, v2, ..., vn-1, en, vn sedemikian sehingga e1=(v0, v1), e2= (v1, v2), ..., en=(vn-1, vn) adalah sisi–sisi dari graf G . Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut.

6. Siklus (cycle) atau Sirkuit (circuit)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.

7. Keterhubungan (Connected)

Graf tak berarah G disebut graf terhubung (connected graph) jika untuk setiap pasang simpul vidan vj dalam himpunan V terdapat lintasan dari vi ke vj.

8. Upagraf (subgraph) dan Komplemen Upagraf

Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graf, G1=(V1, E1) adalah upagraf dari G jika V1V dan E1E. Komplemen dari upagraf G1 terhadap graf G adalah graf G2=(V2, E2) sedemikian sehingga E2= E- E1 dan V2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E2 bersisian dengannya.

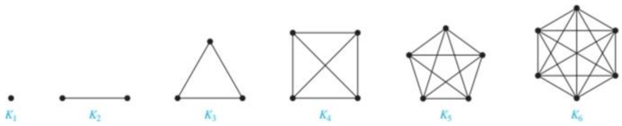
9. Cut-Set

Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi-sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung.

D. Beberapa Graf Khusus

1. Graf Lengkap (Complete Graph)

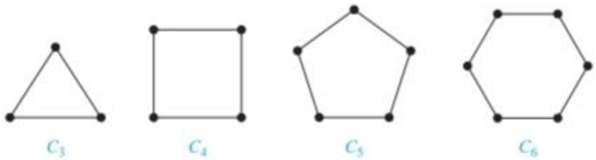
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan Kn. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.



Gambar 2.2 Graf Lengkap

2. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan Cn.



Gambar 2.3 Graf Lingkaran

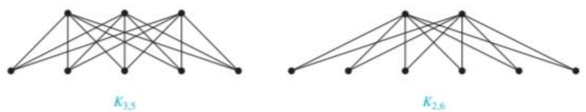
3. Graf Teratur (Regular Graph)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur berderajat r. Jumlah sisi pada graf teratur dengan n buah simpul dan setiap simpul berderajat r adalah $\frac{n.r}{2}$.

Gambar 2.4 Graf Teratur

4. Graf Bipartite

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V1 dan V2 sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V1 ke sebuah simpul di V2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai G(V1,V2).

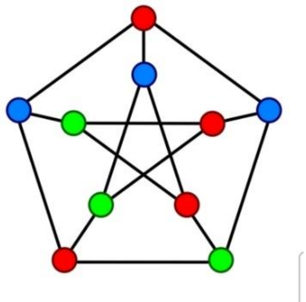


Gambar 2.5 Graf Bipartite

D. Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada graf sehingga tidak ada dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama . Pewarnaan graf ini banyak selaki diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, contohnya adalah untuk menentukan jadwal ujian, pemisahan wilayah pada peta, bahkan pada permainan sudoku.

Ada tiga jenis persoalan pewarnaan graf (graph coloring), yaitu pewarnaan simpul (memberikan warna yang berbeda pada setiap simpul yang bertetangga sehingga tidak ada dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama), pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah.



Gambar 2.6 Pewarnaan simpul graf

Dalam pewarnaan graf terdapat istilah bilangan kromatik yang memiliki definisi jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf. Bilangan kromatik disimbolkan dengan (G). Suatu graf G yang memiliki bilangan kromatis k dituliskan (G) = k.

Berikut adalah beberapa fakta mengenai bilangan kromatis:

1. Graf kosong memiliki bilangan kromatis satu, karena semua simpul tidak terhubung jadi untuk mewarnai semua simpul cukup dibutuhkan satu warna saja.
2. Graf lengkap Kn memiliki (Kn)= n sebab semua simpulnya saling terhubung sehingga diperlukan n buah warna
3. Graf lengkap Km,n memiliki (Km,n)= 2 satu untuk simpul-simpul di himpunan V1 dan satu lagi untuk simpul-simpul di himpunan V2.
4. Graf lingkaran Cn dengan n ganjil memiliki (Cn)= 3 dan untuk n genap maka (Cn)= 2.
5. Sembarang pohon T memiliki (T)= 2
6. Bilangan kromatik dari graf planar tidak ada yang lebih dari empat.

III. PEMBAHASAN

A. Memodelkan Sudoku Menjadi Graf

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, aturan permainan sudoku ukuran n^2 x n^2 adalah pemain memasukkan angka satu sampai n^2 pada setiap sel dengan setiap baris, kolom, dan sub-kotak tidak boleh terdapat angka yang ganda atau harus berbeda. Berdasarkan dari aturan permainan sudoku tersebut maka persoalan ini dapat dimodelkan menjadi sebuah graf dan dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan graf karena jika kita ibaratkan setiap sel pada sudoku menjadi simpul dan hubungan setiap sel dengan baris dan kolom yang bersesuaian serta sel lain yang berada satu sub-sotak yang sama dengan sel tersebut diibaratkan dengan sisi yang menghubungkan setiap simpulnya, maka jika diterapkan aturan pewarnaan pada graf sudoku tersebut, aturan dari permainan sudoku dapat dipenuhi.

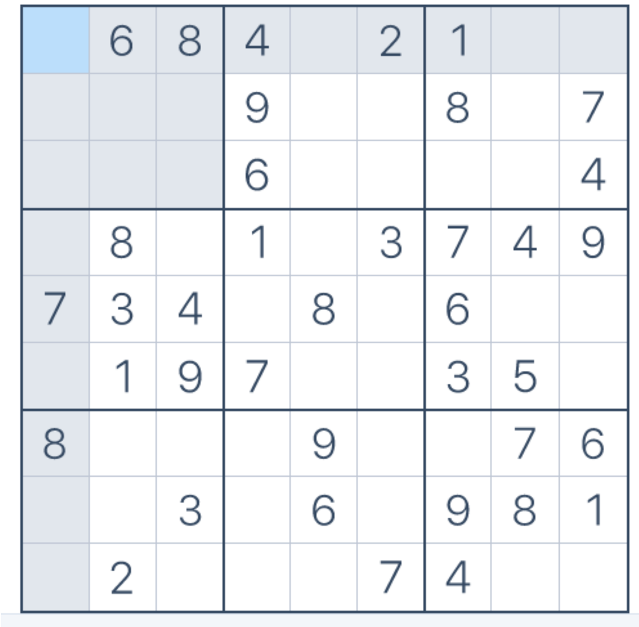
Secara formal graf sudoku berukuran n^2 x n^2 ini memiliki $n^2.n^2$ simpul yang disimbolkan oleh (i, j) dengan $1 \leq i, j \leq n^2$. Sepasang simpul (i, j) dan (i′ , j′) dapat dikatakan bertetangga jika i = i′ atau j = j′ atau ⌈i/n⌉ = ⌈i′/n⌉ dan ⌈j/n⌉ = ⌈j′/n⌉. Pernyataan tersebut berarti pasangan simpul (i, j) dan (i’, j’) dikatakan bertetangga jika (i’, j’) satu baris atau satu kolom dengan (i, j) dan berada pada satu sub-kotak yang sama dengan (i, j).

Karena banyaknya tetangga suatu simpul yang berada pada baris yang sama adalah n^2 - 1 dan banyaknya tetangga suatu simpul pada kolom yang sama adalah n^2 - 1 serta banyaknya tetangga yang tersisa pada satu sub-kotak yang sama adalah (n - 1)(n - 1) = n^2 -2n + 1, maka untuk setiap simpul pada graf sudoku memiliki derajat n²-1 + n²-1 + n² - 2n + 1 = 3n²- 2n - 1. Contohnya pada sudoku berukuran 9x9 (n = 3) setiap simpulnya memiliki derajat 20.

Berdasarkan penjelasan diatas maka permainan sudoku berukuran $n^2 \times n^2$ tersebut dapat dimodelkan menjadi graf teratur atau graf reguler dengan $n^2.n^2$ simpul dengan masing masing simpulnya berderajat $3n^2-2n-1$ dan memiliki sisi sebanyak $\frac{3n^6-2n^5-n^4}{2}$.

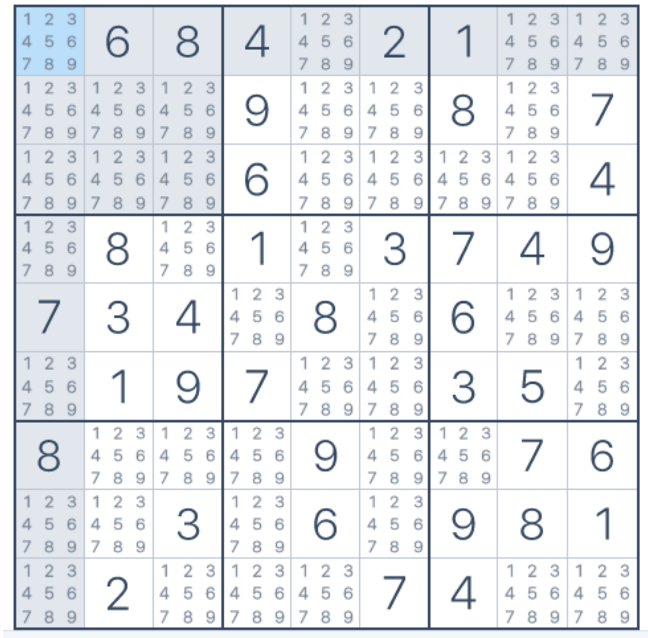
B. Menyelesaikan Sudoku Dengan Menggunakan Graf

Langkah pertama untuk menyelesaikan permainan sudoku dengan menggunakan teori graf adalah pandang sudoku sebagai graf (setiap sel diibaratkan sebagai simpul dan setiap simpul bertetangga dengan simpul lain yang terletak pada baris, kolom, dan sub-kotak yang sama). Selanjutnya graf bisa diberi warna dengan penomoran angka 1 sampai n². Suatu simpul telah diberi warna jika sudah terisi dengan angka 1 sampai n² . Perhatikan gambar 3.1, pada baris 1 dan kolom 1 anggaplah sel tersebut sebagai simpul (1, 1) yang bertetangga dengan sel yang pada gambar 3.1 berwarna lebih gelap yang merupakan sel yang berada pada baris, kolom, dan sub-kotak yang sama.



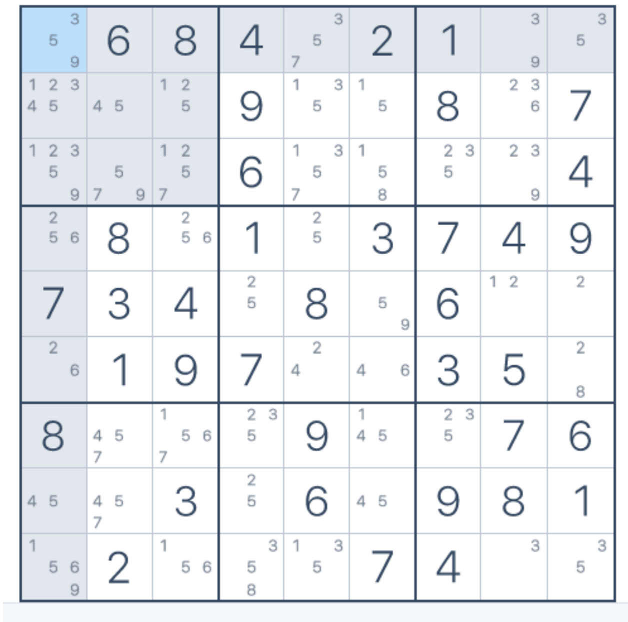
Gambar 3.1 Langkah pertama: memodelkan sudoku dengan graf
Sumber: https://sudoku.com/

Langkah kedua adalah mengisi semua simpul yang belum diwarnai atau belum terisi dengan semua kemungkinan warna yang ada (angka 1 sampai n²). Gambar 3.2 memperlihatkan semua simpul yang belum terisi diisi dengan angka 1 sampai n^2.



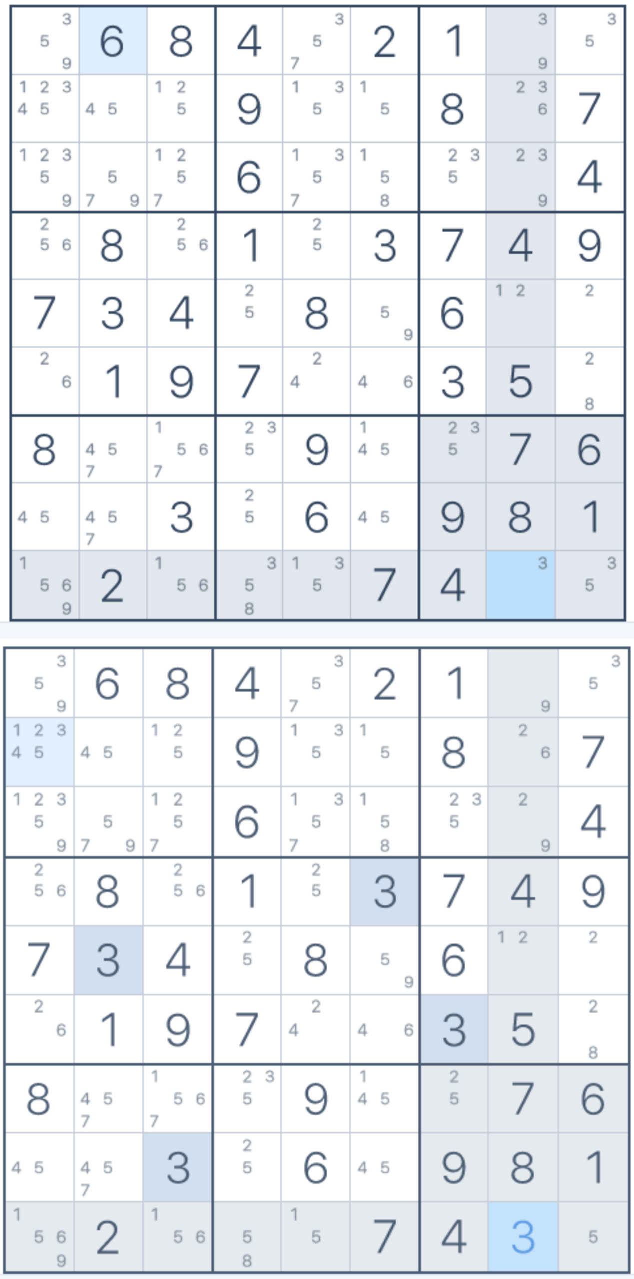
Gambar 3.2 Langkah kedua: mengisi semua simpul yang belum diwarnai dengan semua kemungkinan warna yang ada
Sumber: https://sudoku.com/

Langkah ketiga adalah tinjau simpul yang sudah diberi warna, lalu pada simpul yang bertetangga dengannya, eliminasi kemungkinan warna yang sama dengan warna simpul yang telah terisi. Lakukan pada setiap simpul yang telah terisi. Gambar 3.3 menunjukkan sudoku yang telah dieliminasi semua kemungkinan warna yang sama dengan simpul yang telah terisi pada simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah terisi.



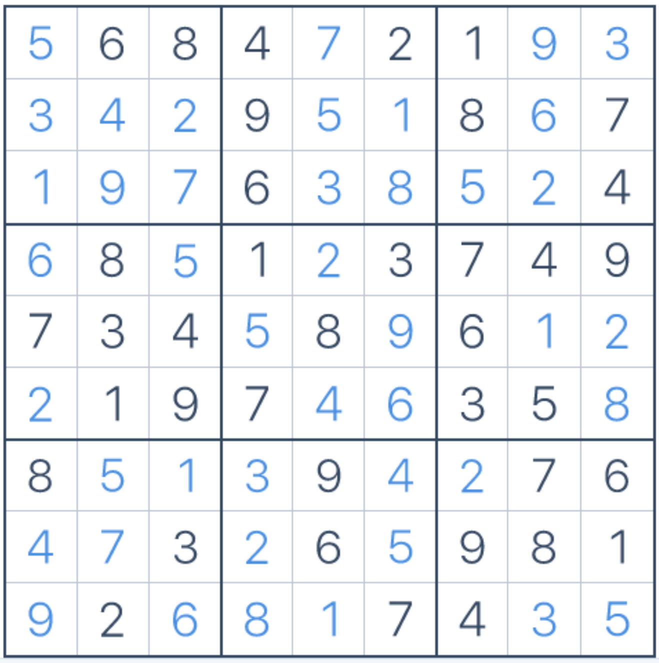
Gambar 3.3 Langkah ketiga: Mengeliminasi kemungkinan warna yang sama
Sumber: https://sudoku.com/

Langkah keempat, setelah mengeliminasi kemungkinan warna pada simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai, carilah simpul yang hanya tersisa 1 kemungkinan warna lalu warnai simpul tersebut dengan warna tersebut dan lakukan kembali langkah ketiga. Gambar 3.4 menunjukkan simpul yang hanya tersisa 1 kemungkinan dan mengisinya.



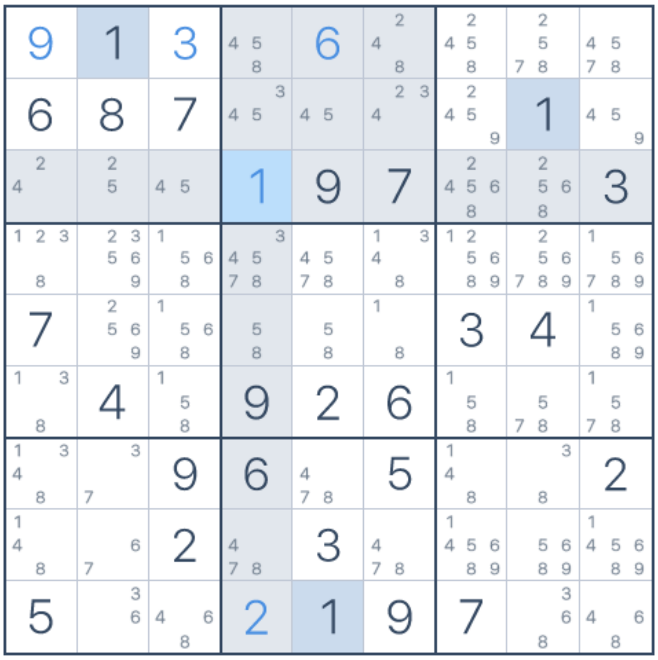
Gambar 3.4 Langkah keempat
Sumber: https://sudoku.com/

Langkah kelima yaitu ulangi terus langkah keempat dan ketiga sampai akhirnya seluruh simpul pada sudoku telah berhasil diwarnai. Gambar 3.5 menunjukkan sudoku yang seluruh selnya telah terisi.



Gambar 3.6 Sudoku yang telah terisi semua selnya
Sumber: https://sudoku.com/

Sebagai catatan, cara sederhana ini tidak selalu berhasil karena bisa saja tidak menemukan simpul yang hanya tersisa satu kemungkinan warna. Seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.6. Banyak sekali strategi yang bisa dilakukan ketika menemui keadaan seperti itu tetapi tidak akan dibahas pada makalah ini sehingga penulis hanya menyampaikan cara yang sederhana ini untuk menunjukkan bahwa permainan sudoku ini dapat diselesaikan dengan mengaplikasikan teori graf.



Gambar 3.6 Sudoku yang lebih sulit untuk diselesaikan
Sumber: https://sudoku.com/

IV. KESIMPULAN

Teori graf yang merupakan salah satu materi dari matakuliah IF2120 Matematika Diskrit pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari sangat banyak. Graf dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan permasalahan pada berbagai bidang seperti untuk menyelesaikan permasalahan jaringan sosial, jaringan komunikasi, jaringan informasi, jaringan transportasi, jejaring makanan pada bidang biologi, rangkaian listrik, pewarnaan wilayah pada peta, menentukan jadwal ujian, turnamen, bahkan pada permainan sudoku.

Permainan sudoku berukuran n^2xn^2 adalah permainan teka-teki berbasis logika dengan pemain harus mengisikan angka 1 sampai n^2 pada setiap sel dengan syarat angka yang diisikan pada setiap baris, kolom, dan sub-kotak tidak boleh sama. Oleh sebab itu dapat ditarik kesimpulan bahwa permainan sudoku dapat dimodelkan dengan menggunakan graf dengan fakta sebagai berikut:

1. Setiap sel dapat diubah menjadi sebuah simpul, sehingga sudoku n^2xn^2 dapat dimodelkan menjadi graf dengan $n^2.n^2$ simpul
2. Graf sudoku merupakan graf reguler atau graf teratur berderajat $3n^2$-2n-1
3. Jumlah semua sisi yang terdapat pada graf sudoku adalah $\frac{3n^6-2n^5-n^4}{2}$.
4. Graf sudoku hanya dapat diwarnai dengan n^2

V. UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih kepada Allah swt. karena senantiasa memberikan rahmat dan karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan makalah ini dengan tepat waktu. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Ibu Fariska Zakhralativa Ruskanda, ST., MT, Ibu Dr. Nur Ulfa Maulidevi, ST., M.Sc., Ibu Dra. Harlili S., M.Sc., dan Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT., selaku dosen pengampu mata kuliah Matematika Diskrit atas segala bimbingan dan ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada kedua orangtua penulis dan semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan makalah ini baik secara langsung maupun tidak langsung. Terakhir, penulis mengucapkan terima kasih kepada diri penulis sendiri karena telah mencoba menyelesaikan makalah ini dengan semaksimal mungkin. Dalam pengerjaan makalah ini dimungkinkan terdapat kesalahan yang tidak sengaja. Oleh sebab itu, penulis sangat terbuka untuk menerima kritik, saran, serta komentar dari berbagai pihak agar kedepannya penulis dapat mengerjakannya dengan lebih baik lagi. Semoga dengan adanya makalah ini dapat bermanfaat bagi orang banyak.

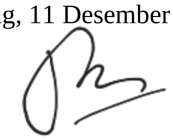
REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi, Matematika Diskrit Edisi 3, Bandung: Informatika Bandung, 2010
[2] Kenneth H, Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition, New York: McGraw-Hill, 2012.
[3] History of Sudoku, https://www.sudokuessentials.com/history-of-sudoku.html diakses pada 9 Desember 2020 pukul 20.00
[4] The History of Sudoku, https://sudoku.com/how-to-play/the-history-of-sudoku/ diakses pada 9 Desember 2020 pukul 20.15
[5] Herzberg, Agnes M; M. Ram Murty, Sudoku Squares and Chromatic Polynomials, http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf diakses pada 9 Desember 2020 pukul 22.30
[6] Mathematics and Sudokus; Solving Algorithms (II), http://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/meerkamp/Site/Solving_any_Sudoku_II.html diakses pada 9 Desember 2020 pukul 23.00
[7] Crook, J.F. A Pencil-and-Paper Algorithm for Solving Puzzles, http://www.ams.org/notices/200904/rtx090400460p.pdf diakses pada 9 Desember 2020 pukul 23.15
[8] Teknik Dasar, http://sudokuindonesia.blogspot.com/2006/04/tehnik-dasar.html diakses pada 10 Desember 16.00

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2020



Prana Gusriana 13519195